

一维更键反铁磁链的孤子激发*

汪森, 陈浩, 王瑞强

(华南师范大学物理与电信工程学院, 广东 广州 510006)

摘要: 研究了一维更键海森伯反铁磁链的孤子激发问题。在该反铁磁链模型的哈密顿量中, 考虑了格点间的最近邻及次近邻相互作用、Dzyaloshinskii-Moriya 相互作用和恒定外磁场的影响。利用 Holstain-Primakoff 变换、多重尺度方法, 得到了系统不考虑非线性项时自旋波的频率 ω 和考虑非线性项时两套格子所对应的两个亮孤子解。在此基础上, 讨论了波数 k 、更键强度 m (即最近邻交换作用比值 J'_1/J_1) 对 ω 和孤子峰值、宽度、能量的影响。研究表明: ω 可以分为光学支 ω_+ 和声学支 ω_- , 在 $kb = 0, \pm 2\pi$ 附近 (b 为最近邻元胞间距), ω 并不存在; 声学支 ω_- 有对应的亮孤子解, 光学支则没有; J_1 一定时, m 越小, ω 两分支间间隙越小; 参数相同时, 两个亮孤子解的孤子峰宽、相速、群速、能量量子相同, 包络振幅和相位不同; 两孤子解能量量子小于不考虑非线性项时的自旋波能量量子, 两孤子解是稳定解; m 的大小不仅影响两孤子的相对峰值大小, 还影响两孤子的相对相位。两孤子解的峰值大小随 m 、 k 的变化而变, 但变化并不一致。两孤子的峰宽既没有随 k 单调增减, 也没有随 m 单调增减。

关键词: 反铁磁链; 孤子; 多重尺度法

中图分类号: O482.51; O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2016) 03-0089-08

Soliton excitation in a one-dimensional antiferromagnetic chain with bond alternation

WANG Sen, CHEN Hao, WANG Ruiqiang

(School of Physics and Telecommunication Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The soliton excitation of a one-dimensional Heisenberg antiferromagnetic chain with bond alternation was studied. In the Hamiltonian of this antiferromagnetic model, the interactions between the nearest neighbor lattice and next nearest neighbor lattice, Dzyaloshinskii-Moriya interaction and constant external magnetic field were considered. By using Holstain-Primakoff transformation and the multi-scale method, spin wave frequency ω was obtained when nonlinear term in the system was neglect, and two bright soliton solutions of the two sets of sublattice were obtained when nonlinear term was considered. Finally, the effects of the wave vector k and bond alternation strength m (the nearest exchange interaction parameter ratios J'_1/J_1) on ω , the soliton peak value, width and energy were discussed. The results show that ω can be divided into optical branch ω_+ and acoustic branch ω_- . ω does not exist near $kb = 0, \pm 2\pi$ (b is the distance between the two nearest neighbor cells). Acoustic branch ω_- corresponds to bright soliton solution, optical does not. When J_1 is certain, the smaller the m is, the smaller the gap between ω_+ and ω_- will be. The peak width, phase velocity, group velocity and energy quantum of the two bright soliton solutions are of the same values, but the envelop amplitude and phase are different with the

* 收稿日期: 2015-10-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11174088)

作者简介: 汪森 (1980年生), 男; 研究方向: 低维非线性物理; 通讯作者: 陈浩; E-mail: chen hao@scnu.edu.cn

same parameter. The energy quantum of the soliton solutions is smaller than the energy quantum of the spin wave solution when nonlinear term is not considered, so the two soliton solution is stable. The m affects not only the relative peak value, but also the relative phase of the two solitons. The peak value of two soliton solutions vary with the changes of m and k , but the change is not the same. The peak width does not increase monotonously with the crease of k , nor does it increase monotonously with that of m .

Key words: antiferromagnetic chain; soliton; multi-scale method

磁性物质在现代科学技术中占有重要地位, 对于它的理论研究一直是凝聚态物理学^[1-3]、材料物理学等的热点^[4-7]。由于磁性物质的许多物理现象都与其磁性链中的非线性元激发(孤子)有关, 准一维磁体的孤子激发问题逐渐得到重视, 并在理论研究上取得了一系列进展^[8-15], 人们求出了一维磁性链中存在单离子各向异性、交换作用各向异性等非线性项时的孤子解。由于很多磁性物质具有更键的特点, 文献[10]已经对一维更键铁磁链的孤子激发进行了研究。一维更键反铁磁物质同样重要, 而且得到广泛研究^[16-19], 尤其是二聚化而导致更键的反铁磁链^[14, 18-19], 成为近年研究的热点, 但一维更键反铁磁的孤子激发问题还没得到很好的解决。

对于一维反铁磁链, 很多模型中都考虑了 Dzyaloshinskii-Moriya (DM) 相互作用^[11, 13, 15], DM 相互作用存在于很多反铁磁体中, 根源于粒子自旋和轨道耦合的反对称性, 是由 Dzyaloshinskii^[20] 和 Moriya^[21] 分别提出, 是一种各向异性超交换相互作用。因为可用超交换作用模型解释反铁磁自发磁化的起因^[22], 所以在反铁磁模型中考虑超交换作用是很有必要的。Moriya 在 1960 年给出了 DM 相互作用的表达式, 常见的所研究的反铁磁链模型中^[11, 13, 15], DM 相互作用都是交错的, 其所对应的哈密顿量为

$$\sum_i (-1)^i \mathbf{D}_Z \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_{i+1}) \quad (1)$$

上式中 $\mathbf{D}_Z = (0, 0, D)$, 代表 DM 相互作用矢量, 已取该矢量方向为 Z 方向, D 为其大小; \mathbf{S}_i 和 \mathbf{S}_{i+1} 分别代表格点 i 和 $i+1$ 上的自旋矢量。

DM 相互作用是依赖于媒介而实现的, 其大小一般情况下远小于最近邻直接交换作用, 如文献[23-24]所述的苯甲酸铜和 CsCuCl₃ 这两种物质, 因此在一维反铁磁链中, 考虑 DM 相互作用的同时, 有必要考虑与其大小大致处于同一量级的次近邻直接交换作用。

本文求出了一维更键反铁磁链的亮孤子解, 在链中考虑了 DM 相互作用、外磁场作用、最近邻和

次近邻相互作用。在此基础上, 讨论了波数 k 、更键强弱对孤子峰值、宽度、能量等的影响。

1 模型的哈密顿量和运动方程

对于在外磁场作用下、具有 DM 相互作用的一维更键 Heisenberg 反铁磁链, 考虑到次近邻相互作用时, 其哈密顿量 H 可表示为:

$$H = \sum_j \sum_{\delta} J_{\delta} (\mathbf{S}_{2j} \cdot \mathbf{S}_{2j+\delta}) + \sum_j \mathbf{D}_Z \cdot (\mathbf{S}_{2j} \times \mathbf{S}_{2j+1}) + \sum_j \sum_{\delta} J'_{\delta} (\mathbf{S}_{2j-1} \cdot \mathbf{S}_{2j-1+\delta}) + (-1) \sum_j \mathbf{D}'_Z \cdot (\mathbf{S}_{2j-1} \times \mathbf{S}_{2j}) + \mu B \sum_j (S_{2j}^z + S_{2j-1}^z) \quad (2)$$

其中 $\delta = 1, 2$, J_1 、 J'_1 和 J_2 、 J'_2 分别代表最近邻和次近邻二格点离子上电子间的交换作用, 由于是反铁磁, 交换作用都大于零, 且次近邻交换作用远小于最近邻交换作用; 取 DM 相互作用方向为 Z 方向, 即 $\mathbf{D}_Z = (0, 0, D)$ 、 $\mathbf{D}'_Z = (0, 0, D')$, 式中 D 、 D' 取为大于零的实数; B 为外磁场磁感应强度大小; \mathbf{S}_i 代表晶格中 i 格点的自旋; 根据 $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z$, 并利用自旋上升及下降算符 $S_i^{\pm} = S_i^x \pm i S_i^y$, 由式(2)可得

$$H = \sum_j \sum_{\delta} J_{\delta} \left\{ S_{2j}^z S_{2j+\delta}^z + \frac{1}{2} (S_{2j}^+ S_{2j+\delta}^- + S_{2j}^- S_{2j+\delta}^+) \right\} + \sum_j \frac{i}{2} D (S_{2j}^+ S_{2j+1}^- - S_{2j}^- S_{2j+1}^+) + \mu B \sum_j (S_{2j}^z + S_{2j-1}^z) + \sum_j \sum_{\delta} J'_{\delta} \left\{ S_{2j-1}^z S_{2j-1+\delta}^z + \frac{1}{2} (S_{2j-1}^+ S_{2j-1+\delta}^- + S_{2j-1}^- S_{2j-1+\delta}^+) \right\} + \sum_j \frac{i}{2} D' (S_{2j}^+ S_{2j-1}^- - S_{2j}^- S_{2j-1}^+) \quad (3)$$

可采用双子格模型, 设每个子格中自旋数为 N , 总的磁离子数为 $2N$, 并设 $2j$ 、 $2j+1$ 两子格中自旋分别沿 $+Z$ 、 $-Z$ 方向, 利用 Holstein-Primakoff 变换^[25]

$$\begin{aligned} S_{2j}^+ &= (\sqrt{2S - a_{2j}^+ a_{2j}}) a_{2j}, \\ S_{2j}^- &= a_{2j}^+ (\sqrt{2S - a_{2j}^+ a_{2j}}), \\ S_{2j}^z &= S - a_{2j}^+ a_{2j} \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} S_{2j-1}^+ &= b_{2j-1}^+ (\sqrt{2S - b_{2j-1}^+ b_{2j-1}}), \\ S_{2j-1}^- &= (\sqrt{2S - b_{2j-1}^+ b_{2j-1}}) b_{2j-1}, \end{aligned}$$

$$S_{2j-1}^z = b_{2j-1}^+ b_{2j-1} - S \quad (4b)$$

式中 a_{2j} 、 a_{2j}^+ 和 b_{2j-1} 、 b_{2j-1}^+ 分别表示晶格中第 $2j$ 个、第 $2j-1$ 个格点的自旋偏离湮灭算符与产生算符，它们满足对易关系

$$\begin{aligned} [a_i, a_{i'}] &= [a_i^+, a_{i'}^+] = 0, \\ [a_i, a_{i'}^+] &= \delta_{ii'}, \\ [b_j, b_{j'}] &= [b_j^+, b_{j'}^+] = 0, \\ [b_j, b_{j'}^+] &= \delta_{jj'}, \\ [a_i, b_j] &= [a_i^+, b_j] = \\ [a_i, b_j^+] &= [a_j^+, b_j^+] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

在低温情形下，对式 (4a)、(4b) 做展开，并略去算符的三阶以上项，代入到式 (3) 中，结合式 (5) 以及各物理量的大小特点，得到

$$\begin{aligned} H &= -N(J_1 + J'_1 - J_2 - J'_2)S^2 + \\ &J_1 S \sum_j (a_{2j} b_{2j+1} + a_{2j}^+ b_{2j+1}^+ + a_{2j}^+ a_{2j} + b_{2j+1}^+ b_{2j+1}) + \\ &J_2 S \sum_j (a_{2j} a_{2j+2}^+ + a_{2j}^+ a_{2j+2} - a_{2j}^+ a_{2j} - a_{2j+2}^+ a_{2j+2}) + \\ &iDS \sum_j (a_{2j} b_{2j+1} - a_{2j}^+ b_{2j+1}^+) + \\ &J'_1 S \sum_j (a_{2j} b_{2j-1} + a_{2j}^+ b_{2j-1}^+ + a_{2j}^+ a_{2j} + b_{2j-1}^+ b_{2j-1}) + \\ &iD'S \sum_j (a_{2j} b_{2j-1} - a_{2j}^+ b_{2j-1}^+) + \\ &J'_2 S \sum_j (b_{2j-1}^+ b_{2j+1} + b_{2j-1} b_{2j+1}^+ - b_{2j-1}^+ b_{2j-1} - b_{2j+1}^+ b_{2j+1}) + \\ &\mu B \sum_j (b_{2j-1}^+ b_{2j-1} - a_{2j}^+ a_{2j}) + \\ &\left(-\frac{1}{4}J_1\right) \sum_j (a_{2j}^+ a_{2j} a_{2j} b_{2j+1} + a_{2j} b_{2j+1}^+ b_{2j+1} b_{2j+1} + \\ &a_{2j}^+ a_{2j}^+ a_{2j} b_{2j+1}^+ + a_{2j}^+ b_{2j+1}^+ b_{2j+1}^+ b_{2j+1}) + \\ &\left(-\frac{1}{4}J'_1\right) \sum_j (a_{2j}^+ a_{2j} a_{2j} b_{2j-1} + a_{2j} b_{2j-1}^+ b_{2j-1} b_{2j-1} + \\ &a_{2j}^+ a_{2j}^+ a_{2j} b_{2j-1}^+ + a_{2j}^+ b_{2j-1}^+ b_{2j-1}^+ b_{2j-1}) + \\ &(-J_1) \sum_j a_{2j}^+ a_{2j} b_{2j+1}^+ b_{2j+1} + \\ &(-J'_1) \sum_j a_{2j}^+ a_{2j} b_{2j-1}^+ b_{2j-1} \end{aligned} \quad (6)$$

采用 Glauber 相干态表象^[26] $|\alpha_{2j}\rangle$ 、 $|\beta_{2j-1}\rangle$ ，算符 a_{2j} 、 b_{2j-1} 的本征方程为

$$\begin{aligned} a_{2j} |\alpha_{2j}\rangle &= \alpha_{2j} |\alpha_{2j}\rangle, | \alpha_{2j} \rangle a_{2j}^+ = | \alpha_{2j} \rangle \alpha_{2j}^*; \\ b_{2j-1} |\beta_{2j-1}\rangle &= \beta_{2j-1} |\beta_{2j-1}\rangle, | \beta_{2j-1} \rangle b_{2j-1}^+ = | \beta_{2j-1} \rangle \beta_{2j-1}^* \end{aligned} \quad (7)$$

哈密顿量 (6) 式所描述的系统的量子态可表示为 $|\psi\rangle$ ，满足

$$|\psi\rangle = \prod_j |\psi\rangle_j = \prod_j |\alpha_{2j}\rangle |\beta_{2j-1}\rangle \quad (8)$$

利用海森伯运动方程，可得到算符 a_{2j} 、 b_{2j-1} 的运动方程，令 $V_j = \alpha_{2j}$ 、 $\varphi_j = \beta_{2j-1}$ ，得

$$\begin{aligned} i \frac{dV_j}{dt} &= (J_1 S - iDS) \varphi_{j+1}^* + (J_1' S - iD'S) \varphi_j^* + \\ &(J_1 S + J_1' S - \mu B) V_j + J_2 S (V_{j+1} + V_{j-1} - 2V_j) + \\ &\left(-\frac{1}{4}J_1\right) (V_j^2 \varphi_{j+1} + 2 |V_j|^2 \varphi_{j+1}^* + \\ &| \varphi_{j+1} |^2 \varphi_{j+1}^* + 4 | \varphi_{j+1} |^2 V_j) + \\ &\left(-\frac{1}{4}J_1'\right) \left(V_j^2 \varphi_j + 2 |V_j|^2 \varphi_j^* + \right. \\ &\left. | \varphi_j |^2 \varphi_j^* + 4 | \varphi_j |^2 V_j \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} i \frac{d\varphi_j}{dt} &= (J_1 S - iDS) V_{j-1}^* + (J_1' S - iD'S) V_j^* + \\ &(J_1 S + J_1' S + \mu B) \varphi_j + J_2' S (\varphi_{j+1} + \varphi_{j-1} - 2\varphi_j) + \\ &\left(-\frac{1}{4}J_1\right) (\varphi_j^2 V_{j-1} + 2 | \varphi_j |^2 V_{j-1}^* + \\ &| V_{j-1} |^2 V_{j-1}^* + 4 | V_{j-1} |^2 \varphi_j) + \\ &\left(-\frac{1}{4}J_1'\right) (\varphi_j^2 V_j + 2 | \varphi_j |^2 V_j^* + \\ &| V_j |^2 V_j^* + 4 | V_j |^2 \varphi_j) \end{aligned} \quad (10)$$

2 多重尺度方法求解

利用准分立近似和多重尺度相结合的方法^[27-28]，将 $V_j(t)$ 和 $\varphi_j(t)$ 按下述方式展开：

$$\begin{aligned} y_j(t) &= \varepsilon y^{(1)}(\tau, \xi_j, \theta_j) + \varepsilon^2 y^{(2)} \\ &(\tau, \xi_j, \theta_j) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n y_{j,j}^{(n)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y_{j\pm 1}(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n y_{j\pm 1, j\pm 1}^{(n)} = \\ &\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n \sum_{u=0}^{+\infty} \frac{1}{u!} \left[(\pm \varepsilon b)^u \frac{\partial^u}{\partial \xi_j^u} y_{j,j}^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$y_{j,j\pm 1}^{(n)} = \sum_{\rho=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho!} \left[(\pm kb)^\rho \frac{\partial^\rho}{\partial \theta_j^\rho} y_{j,j}^{(n)} \right] \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} y_{j,j}^{(n)} &= y^{(n)}(\tau, \xi_j, \theta_j), \\ y_{j,j\pm 1}^{(n)} &= y^{(n)}(\tau, \xi_j, \theta_{j\pm 1}) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\tau = \varepsilon^2 t, \xi_j = \varepsilon(jb - v_g t), \theta_j = kjb - \omega t \quad (15)$$

上式中， $y_j(t)$ 代表 $V_j(t)$ 或 $\varphi_j(t)$ ； ε 是展开小量； τ 、 ξ_j 、 θ_j 都是多重尺度变量，其中 θ_j 为快变量， τ 、 ξ_j 为慢变量； b 则为最邻近元胞的间距； t 为时间， v_g 、 ω 为待求量。

把式 (11)、(12)、(13)、(14)、(15) 代入式 (9)、(10)，并比较 ε 的不同幂次项。为了方便表达，定义如下：

$$\begin{aligned} K_{j,j}^{(n)} &= -i\omega \frac{\partial}{\partial \theta_j} - (J_1 S + J_1' S - \mu B) - \\ &2J_2 S \left[\sum_{\rho=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\rho)!} (kb)^{2\rho} \frac{\partial^{2\rho}}{\partial \theta_j^{2\rho}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$L_{j,j}^{(n)} = -i\omega \frac{\partial}{\partial \theta_j} - (J_1 S + J_1' S + \mu B) - 2J_2' S \left[\sum_{\rho=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\rho)!} (kb)^{2\rho} \frac{\partial^{2\rho}}{\partial \theta_j^{2\rho}} \right] \quad (17)$$

$$M_{j,j}^{(n)} = K_{j,j}^{(n)} L_{j,j}^{(n)*} - (J_1^2 + J_1'^2 + D^2 + D'^2) S^2 - 2(J_1 J_1' + DD') S^2 \left[\sum_{\rho=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\rho)!} (kb)^{2\rho} \frac{\partial^{2\rho}}{\partial \theta_j^{2\rho}} \right] - i2(J_1 D' - J_1' D) S^2 \left[\sum_{\rho=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\rho+1)!} (kb)^{2\rho+1} \frac{\partial^{2\rho+1}}{\partial \theta_j^{2\rho+1}} \right] \quad (18)$$

1) 比较 ε 的一次项, 得到

$$K_{j,j}^{(1)} V_{j,j}^{(1)} = (J_1 S - iDS) \varphi_{j,j+1}^{(1)*} + (J_1' S - iD'S) \varphi_{j,j}^{(1)*} \quad (19)$$

$$L_{j,j}^{(1)} \varphi_{j,j}^{(1)} = (J_1 S - iDS) V_{j,j-1}^{(1)*} + (J_1' S - iD'S) V_{j,j}^{(1)*} \quad (20)$$

由式 (19)、(20), 得

$$M_{j,j}^{(1)} V_{j,j}^{(1)} = 0 \quad (21)$$

由式 (19)、(20)、(21) 可得

$$V_{j,j}^{(1)} = F_1(\tau, \xi_j) \exp(i\theta_j) \quad (22)$$

$$\varphi_{j,j}^{(1)} = A_1 F_1^*(\tau, \xi_j) \exp(-i\theta_j) \quad (23)$$

上式中 $\theta_j = kjb - \omega t$, 其中的 ω 、 A_1 为

$$\omega = \omega_{\pm} = \frac{(C_1 - C_2) \pm \sqrt{(C_1 + C_2)^2 - 4|C_3|^2}}{2} \quad (24)$$

$$A_1 = \frac{C_3}{-\omega - C_2} \quad (25)$$

$$C_1 = J_1 S + J_1' S - 2J_2 S(1 - \cos kb) - \mu B \quad (26)$$

$$C_2 = J_1 S + J_1' S - 2J_2' S(1 - \cos kb) + \mu B \quad (27)$$

$$C_3 = (J_1 S - iDS) \exp(ikb) + (J_1' S - iD'S) \quad (28)$$

由以上计算过程可知, 式 (24) 中 ω 即系统在不考虑非线性项时的自旋波频率, 分为光学支 ω_+ 和声学支 ω_- 。

2) 比较 ε 的二次项, 得到

$$K_{j,j}^{(2)} V_{j,j}^{(2)} = (J_1 S - iDS) \varphi_{j,j+1}^{(2)*} + (J_1' S - iD'S) \varphi_{j,j}^{(2)*} + i v_g \frac{\partial}{\partial \xi_j} V_{j,j}^{(1)} + b(J_1 S - iDS) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \varphi_{j,j+1}^{(1)*} + J_2 S b \frac{\partial}{\partial \xi_j} (V_{j,j+1}^{(1)} - V_{j,j-1}^{(1)}) \quad (29)$$

$$L_{j,j}^{(2)} \varphi_{j,j}^{(2)} = (J_1 S - iDS) V_{j,j-1}^{(2)*} +$$

$$(J_1' S - iD'S) V_{j,j}^{(2)*} + i v_g \frac{\partial}{\partial \xi_j} \varphi_{j,j}^{(1)} - b(J_1 S - iDS) \frac{\partial}{\partial \xi_j} V_{j,j-1}^{(1)*} + J_2' S b \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\varphi_{j,j+1}^{(1)} - \varphi_{j,j-1}^{(1)}) \quad (30)$$

由式 (29)、(30) 以及式 (22)、(23) 可得

$$M_{j,j}^{(2)} V_{j,j}^{(2)} = -i2b \{ [(J_1' D - J_1 D') S^2 \cos kb - (J_1 J_1' + DD') S^2 \sin kb] + (\omega + C_2) (J_2' S |A_1|^2 + J_2 S) \sin kb \} \times \frac{\partial F_1}{\partial \xi_j} \exp(i\theta_j) + i v_g (\omega + C_2) (|A_1|^2 - 1) \frac{\partial F_1}{\partial \xi_j} \exp(i\theta_j) \quad (31)$$

上式中, 右端含有诱发久期项的 $\exp(i\theta_j)$, 为了消除久期项, 要求右端方括号内的值为零, 得到

$$v_g = \frac{-2b}{1 - |A_1|^2} \left[\frac{(J_1' D - J_1 D') S^2 \cos kb - (J_1 J_1' + DD') S^2 \sin kb}{\omega + C_2} + (J_2' S |A_1|^2 + J_2 S) \sin kb \right] \quad (32)$$

上式满足 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ 。根据式 (29)、(30), 可得

$$V_{j,j}^{(2)} = F_2(\tau, \xi_j) \exp(i\theta_j) \quad (33)$$

$$\varphi_{j,j}^{(2)} = A_1 V_{j,j}^{(2)*} + \left(\frac{1}{-\omega - C_2} \right)$$

$$[i v_g A_1 - b(J_1 S - iDS) \exp(ikb) - i2J_2' S b A_1 \sin kb] \frac{\partial F_1^*}{\partial \xi_j} \exp(-i\theta_j) \quad (34)$$

3) 比较 ε 的三次项, 得到

$$K_{j,j}^{(3)} V_{j,j}^{(3)} = (J_1 S - iDS) \varphi_{j,j+1}^{(3)*} + (J_1' S - iD'S) \varphi_{j,j}^{(3)*} +$$

$$i v_g \frac{\partial}{\partial \xi_j} V_{j,j}^{(2)} + b(J_1 S - iDS) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \varphi_{j,j+1}^{(2)*} +$$

$$J_2 S b \frac{\partial}{\partial \xi_j} (V_{j,j+1}^{(2)} - V_{j,j-1}^{(2)}) +$$

$$\frac{1}{2} b^2 J_2 S \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} (V_{j,j+1}^{(1)} + V_{j,j-1}^{(1)}) +$$

$$\frac{1}{2} b^2 (J_1 S - iDS) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} \varphi_{j,j+1}^{(1)*} - i \frac{\partial}{\partial \tau} V_{j,j}^{(1)} +$$

$$\left(-\frac{1}{4} J_1 \right) (V_{j,j}^{(1)2} \varphi_{j,j+1}^{(1)} + 2 |V_{j,j}^{(1)}|^2 \varphi_{j,j+1}^{(1)*} +$$

$$| \varphi_{j,j+1}^{(1)}|^2 \varphi_{j,j+1}^{(1)*} + 4 | \varphi_{j,j+1}^{(1)}|^2 V_{j,j}^{(1)}) +$$

$$\left(-\frac{1}{4} J_1' \right) (V_{j,j}^{(1)2} \varphi_{j,j}^{(1)} + 2 |V_{j,j}^{(1)}|^2 \varphi_{j,j}^{(1)*} +$$

$$| \varphi_{j,j}^{(1)}|^2 \varphi_{j,j}^{(1)*} + 4 | \varphi_{j,j}^{(1)}|^2 V_{j,j}^{(1)}) \quad (35)$$

$$L_{j,j}^{(3)} \varphi_{j,j}^{(3)} = (J_1 S - iDS) V_{j,j-1}^{(3)*} +$$

$$\begin{aligned}
 & (J_1'S - iD'S)V_{jj}^{(3)*} + iv_g \frac{\partial}{\partial \xi_j} \varphi_{jj}^{(2)} - \\
 & b(J_1S - iDS) \frac{\partial}{\partial \xi_j} V_{jj-1}^{(2)*} + \\
 & J_2'Sb \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\varphi_{jj+1}^{(2)} - \varphi_{jj-1}^{(2)}) + \\
 & \frac{1}{2}b^2J_2'S \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} (\varphi_{jj+1}^{(1)} + \varphi_{jj-1}^{(1)}) + \\
 & \frac{1}{2}b^2(J_1S - iDS) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} V_{jj-1}^{(1)*} - \\
 & i \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_{jj}^{(1)} + (-\frac{1}{4}J_1) \cdot \\
 & (\varphi_{jj}^{(1)2} V_{jj-1}^{(1)} + 2|\varphi_{jj}^{(1)}|^2 V_{jj-1}^{(1)*} + \\
 & |V_{jj-1}^{(1)}|^2 V_{jj-1}^{(1)*} + 4|V_{jj-1}^{(1)}|^2 \varphi_{jj}^{(1)}) + \\
 & (-\frac{1}{4}J_1') (\varphi_{jj}^{(1)2} V_{jj}^{(1)} + 2|\varphi_{jj}^{(1)}|^2 V_{jj}^{(1)*} + \\
 & |V_{jj}^{(1)}|^2 V_{jj}^{(1)*} + 4|V_{jj}^{(1)}|^2 \varphi_{jj}^{(1)}) \quad (36)
 \end{aligned}$$

由式 (35)、(36)，结合式 (22)、(23)、(32)、(33)、(34) 可得

$$\begin{aligned}
 M_{jj}^{(3)} V_{jj}^{(3)} &= i(2\omega + C_2 - C_1) \frac{\partial F_1}{\partial \tau} \exp(i\theta_j) + \\
 & \left[\frac{1}{2}(2\omega + C_2 - C_1) \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right] \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi_j^2} \exp(i\theta_j) + \\
 & \left\{ \frac{C_1 + C_2}{2(\omega + C_2)} [(-J_1)(C_3 e^{-ikb} + C_3^* e^{ikb}) + \right. \\
 & \left. (-J_1')(C_3 + C_3^*)] + 2(\omega - C_1)(-J_1 - J_1') \right\} \cdot \\
 & |F_1|^2 F_1 \exp(i\theta_j) \quad (37)
 \end{aligned}$$

上式中，右端含有诱发久期项的 $\exp(i\theta_j)$ ，为了消除久期项，得到

$$\begin{aligned}
 i \frac{\partial F_1(\tau, \xi_j)}{\partial \tau} + P \frac{\partial^2 F_1(\tau, \xi_j)}{\partial \xi_j^2} + \\
 Q |F_1(\tau, \xi_j)|^2 F_1(\tau, \xi_j) = 0 \quad (38)
 \end{aligned}$$

其中

$$P = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
 Q = \frac{1}{2\omega + C_2 - C_1} \left\{ \frac{C_1 + C_2}{2(\omega + C_2)} \cdot \right. \\
 \left. [(-J_1)(C_3 e^{-ikb} + C_3^* e^{ikb}) + (-J_1')(C_3 + C_3^*)] + \right. \\
 \left. 2(\omega - C_1)(-J_1 - J_1') \right\} \quad (40)
 \end{aligned}$$

令 $F_1(\tau, \xi_j) = f(x_j, t)/\varepsilon$, $\xi_j = \varepsilon(jb - v_g t) = \varepsilon x_j$ ，结合 $\tau = \varepsilon^2 t$ ，代入式 (38) 可得到

$$i \frac{\partial f}{\partial t} + P \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + Q |f|^2 f = 0 \quad (41)$$

很显然，上式即是标准的非线性薛定谔方程。

3 孤子解

当式 (39)、(40) 中 $P > 0$ 、 $Q > 0$ 时，根据文献 [27]，式 (41) 有着亮孤子解，即

$$\begin{aligned}
 f(x_j, t) = \pm \sqrt{\frac{2\gamma}{Q}} \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{\gamma}{P}} (x_j - 2qPt - x_0) \right] \cdot \\
 \exp \{ i [qx_j - (q^2P - \gamma)t] \} \quad (42)
 \end{aligned}$$

将上式代入 $F_1(\tau, \xi_j) = f(x_j, t)/\varepsilon$ ，再结合式 (11)、(15)、(22)、(23)，可知，在 $V_j(t)$ 、 $\varphi_j(t)$ 取一级近似下，有

$$\begin{aligned}
 V_j(t) &= \pm \sqrt{2\gamma/Q} \cdot \\
 \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{P}} [j b - (2qP + v_g)t - x_0] \right\} \cdot \\
 \exp \{ i [(k + q)j b - \Omega t] \} \quad (43) \\
 \varphi_j(t) &= A_1 V_j^*(t) = \pm A_1 \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{2\gamma}{Q}} \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{P}} [j b - (2qP + v_g)t - x_0] \right\} \cdot \\
 \exp \{ -i [(k + q)j b - \Omega t] \} \quad (44)
 \end{aligned}$$

其中 $\Omega = qv_g + q^2P - \gamma + \omega$, $\gamma > 0$, γ 、 k 、 q 是待定常数， x_0 是积分常数， b 则为最邻近元胞的间距， A_1 、 v_g 、 P 、 Q 分别由式 (25)、(32)、(39)、(40) 表达。

若将所讨论的反铁磁链闭合成一个环，则 $V_j(t)$ 满足周期边界条件 $V_j(t) = V_{j+N}(t)$ ，式中 N 为元胞的个数，代入式 (43)，可得

$$k + q = \frac{2n\pi}{Nb}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N) \quad (45)$$

将式 (43)、(44) 代入式 (8)，得

$$\psi_j = A_1 \frac{2\gamma}{Q} \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{P}} [j b - (2qP + v_g)t - x_0] \right\} \quad (46)$$

将上式归一化，得

$$\gamma = (3b)^{\frac{2}{3}} P^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{4}{Q} \cdot |A_1| \right)^{-\frac{4}{3}} \quad (47)$$

由式 (43)、(44) 可知，系统两套格子对应由 $V_j(t)$ 、 $\varphi_j(t)$ 描述的两个孤子波，包络为钟形，峰宽都为 $\sqrt{P/\gamma}$ ，包络中心都以速度 $(2qP + v_g)$ 在一维链中传播，相速为 $\Omega/(k + q)$ ，但两孤子波的振幅和相位不同。

4 讨论 (取 $q = 0$)

为讨论式 (24) 中的 ω 、式 (43) 中的 $V_j(t)$ 和式 (44) 中 $\varphi_j(t)$ ，不失一般性，可取式 (45) 中 $q = 0$ 。由于 ω 、 $V_j(t)$ 和 $\varphi_j(t)$ 主要决定于最近

邻交换作用 J_1 、 J'_1 和波数 k ，我们假定更键强度 $m = J'_1/J_1 > 0$ ，取两组数据（其相同部分有 $m_j = 0.9$ ， $m_D = 0.8$ ； $J_1 = 1$ ， $J'_1 = m * J_1$ ； $J_2 = 0.2$ ； $J'_2 = m_j * m * J_2$ ； $\mu B = 0.1$ ； $S = -0.5$ ； $D = 0.2$ ， $D_1 = m_D * m * D$ ； $b = 1$ 。 m 取不同值， $m = 0.9$ 、 0.7 分别对应实线和点线）结合图像加以分析。过程如下：

m 取不同值时 ω 的图像如图 1 所示，其中粗线对应光学支，细线对应声学支，“*”符号对应光学支极大值，“☆”符号对应声学支极小值。从图中可以看出， J'_1 减小会导致 ω_+ 、 ω_- 的绝对值变小，即两频率间隔变小；在 $kb = 0, \pm 2\pi$ 附近，光学支频率 ω_+ 和声学支频率 ω_- 并不存在，这是由于此时 $(C_1 + C_2)^2 - 4|C_3|^2 < 0$ ，导致式 (24) 中 ω 的值为复数； ω_+ 、 ω_- 取最小值和最大值时的 k 值并不总恒定，而是随着 $m = J'_1/J_1$ （表示更键强度）的变化而变，由式 (24) 知，导致这一现象的原因是，此时 k 需满足 $(C_1 + C_2)^2 - 4|C_3|^2 = 0$ ；从图中还可看到，总有 $\omega_+ \geq \omega_-$ ，这个结论也可从式 (24) 直接得出。

对于声学支 ω_- ，有 $P = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} > 0$ ，对于光学支 ω_+ ，则有 $P < 0$ ，可见只有声学支可能有亮孤子解，故图 1 以后的图都研究的是声学支的情形，由图 2 中有 $Q > 0$ ，可见，声学支有亮孤子解，光学支则没有。

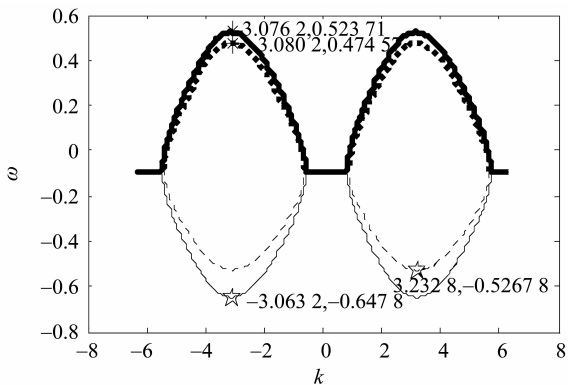


图 1 m 取不同值时 ω 的图像

Fig. 1 The images of ω with different m

由两孤波中 $\Omega = qv_g + q^2P - \gamma + \omega$ ， $\gamma > 0$ ，当 $q = 0$ 时，有 $\Omega = -\gamma + \omega$ ，可知 $\Omega < \omega$ ，即两孤波能量量子相同，且小于不考虑非线性项时自旋波相应能量量子，这表明由于非线性相互作用而导致的孤波

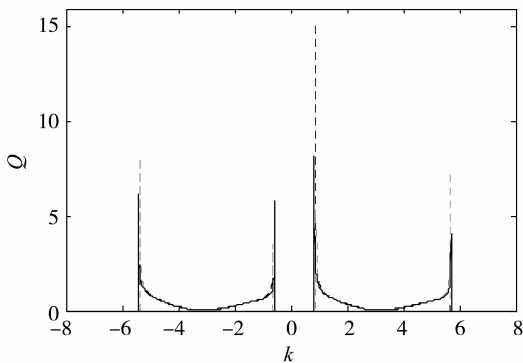


图 2 m 取不同值时 Q 的图像

Fig. 2 The images of Q with different m

解是稳定解。

由式 (43)、(44) 知，孤波解 $V_j(t)$ 和 $\varphi_j(t)$ 满足： $\varphi_j(t) = A_1 V_j^*(t)$ ，根据式 (25)、(26)、(27)、(28) 可得，

$$A_1 = \frac{J_1 \text{Scos } kb + D \text{Ssin } kb + J'_1 S + i(J_1 \text{Ssin } kb - D \text{Scos } kb - D'S)}{-\omega - 4JS}$$

很明显， A_1 为复数， A_1 的大小和相位都随 m 的变化而变，也就是说，更键的强弱不仅影响两孤子的相对峰值大小，还影响相对相位。

图 3、图 4 显示了孤波解 $V_j(t)$ 、 $\varphi_j(t)$ 的峰值随 k 变化的图像，可看出， $V_j(t)$ 、 $\varphi_j(t)$ 的峰值大小随 k 变化而变，但变化并不一致，极值数目也不一样，这是由于 $\varphi_j(t) = A_1 V_j^*(t)$ 中 A_1 随 k 而变所导致的； $V_j(t)$ 、 $\varphi_j(t)$ 的峰值大小随 m 的减小而变，变化也并不一致，这是由于 A_1 随 m 而变所导致的。

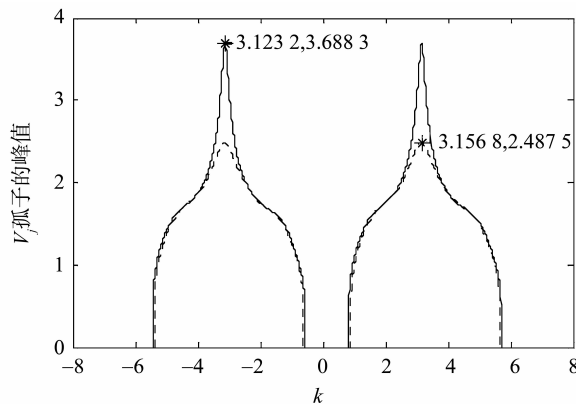


图 3 m 取不同值时 V_j 孤子峰值的图像

Fig. 3 The images of the soliton peak of V_j with different m

由图 5 可知，两孤子的峰宽既没有随 k 单调增减，也没有随 m 单调增减，这是由峰宽 $\sqrt{p/\gamma}$ 的

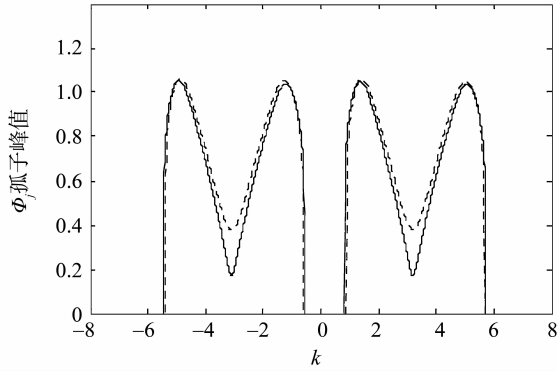


图 4 m 取不同值时 ϕ_j 孤子峰值的图像

Fig. 4 The images of the soliton peak of ϕ_j with different m

表达式所决定的，式中含有 k 、 m 的复杂表达。

图 6 显示了 $k = 3$ 时， $V_j(t)$ (令 $x = jb$) 孤子的包络振幅随 x 、 t 变化的规律，可明显看出，一维更键反铁磁链中确实有孤子存在。

当 $2qP + v_g = 0$ 时，式 (43)、(44) 表示的孤子包络振幅不随时间而变化，代表局域模。

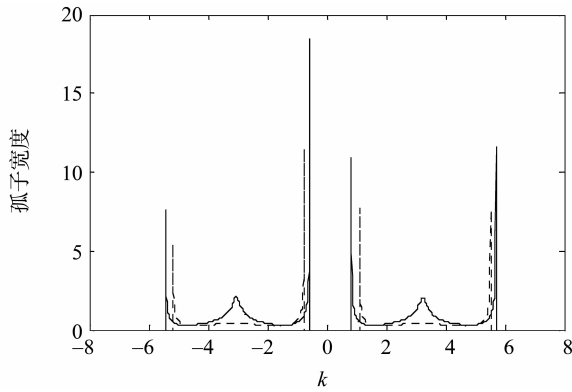


图 5 m 取不同值时 V_j 孤子宽度的图像

Fig. 5 The images of the soliton width of V_j with different m

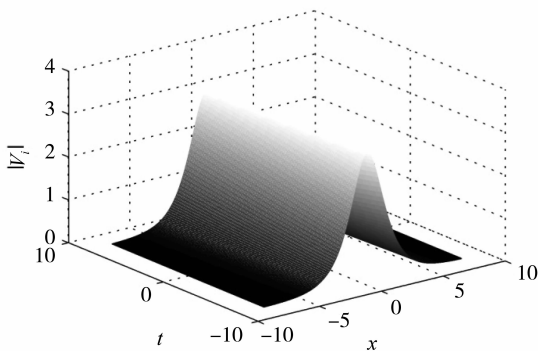


图 6 $k = 3$ 时 V_j 孤子振幅的图像

Fig. 6 The image of the soliton amplitude of V_j with $k = 3$

5 结 论

本文研究了一维更键海森伯反铁磁链的孤子激发问题。利用 Holstain - Primakoff 变换、多重尺度方法，求出了系统不考虑非线性项时自旋波的频率 ω 和考虑非线性项时系统两套格子所对应的两个亮孤子解。然后讨论了波数 k 、更键强度 m (即最近邻交换作用比值 J'_1 / J_1) 对 ω 和孤子峰值、宽度、能量的影响。研究表明： ω 可以分为光学支 ω_+ 和声学支 ω_- ，在 $kb = 0, \pm 2\pi$ 附近 (b 为最近邻元胞间距)， ω 并不存在；声学支 ω_- 有对应的亮孤子解，光学支则没有； J_1 一定时， m 越小， ω 两分支间间隙越小；参数相同时，两个亮孤子解的孤子峰宽、相速、群速、能量量子相同，包络振幅和相位不同；两孤子解能量量子小于不考虑非线性项时的自旋波能量量子，两孤子解是稳定解； m 的大小不仅影响两孤子的相对峰值大小，还影响两孤子的相对相位。两孤子解的峰值大小随 m 、 k 的变化而变，但变化并不一致。两孤子的峰宽既没有随 k 单调增减，也没有随 m 单调增减。

参考文献：

- [1] 姜寿亭,李卫.凝聚态磁性物理[M].北京:科学出版社,2003:122-142.
- [2] 吴深尚.铁磁自旋波对 Texture 介观环中持续电流的影响[J].中山大学学报(自然科学版),1996,35(3):51-55.
- [3] 姜涛,刘金明.一维 Hubbard - Hirsch 模型的铁磁性[J].中山大学学报(自然科学版),1996,35(3):56-61.
- [4] 严密,彭晓领.磁学基础与磁性材料[M].杭州:浙江大学出版社,2006:31-42.
- [5] COEY J M D. Magnetism and magnetic materials[M]. New York: Cambridge University Press, 2009: 128 - 231.
- [6] 郑丽秋,方前锋.巨磁电阻材料 La_xMnO_3 的内耗研究[J].中山大学学报(自然科学版),2001,40(z2):245-247.
- [7] 徐星满,陈卫麟.碳酸根桥联三核铜(II)配合物的合成和磁性质研究[J].中山大学学报(自然科学版),2002,41(4):52-55.
- [8] PUSHKAROV D I, PUSHKAROV K I. Solitary magnons in one - dimensional ferromagnetic chain[J]. Phys Lett A, 1977, 61(5): 339 - 340.
- [9] 翁紫梅,陈浩.单离子各向异性影响下的一维铁磁链中的孤子[J].物理学报,2007,56(4):1911-1918.

- [10] 朱善华, 黄国翔, 徐在新. 一维更键 Heisenberg 铁磁链间隙非线性元激发 [J]. 物理学报, 1997, 46(10): 2036 – 2046.
- [11] PANDIT R, TANNOUS C, KRUMHANSL J A. Statistical mechanics of a classical one-dimensional canted antiferromagnet II Solitons [J]. Phys Rev B, 1983, 28(1): 289 – 299.
- [12] GOUVEA M E, AS P. Nonlinear excitations in the classical one-dimensional antiferromagnet [J]. Phys Rev B, 1986, 34(1): 306 – 317.
- [13] LIU W M, ZHOU B L. Solitons in an order-parameter-preserving antiferromagnet [J]. J Phys: Cond Matter, 1993, 5(12): L149 – L156.
- [14] 屈少华. 反铁磁链中的孤波研究 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 2004, 42(2): 106 – 109.
- [15] DANIEL M, KAVITHA L. Localized spin excitations in an anisotropic Heisenberg ferromagnet with Dzyaloshinskii-Moriya interactions [J]. Phys Rev B, 2001, 63(17): 172302.
- [16] CHIBA M, KUBO T, AJIRO Y, et al. $S = 1/2$ quantum spin-gap in 1-D antiferromagnet with bond alternation: NMR study of $\text{CuCl}_2(\gamma\text{-picoline})_2$ [J]. Czechoslovak J Phys, 1996, 46(4): 1971 – 1972.
- [17] SORENSEN E, AFFLECK I, AUGIER D, et al. Soliton approach to Spin-Peierls antiferromagnets: large-scale numerical results [J]. Phys Rev B, 1998, 58(22): R14701.
- [18] 王治国, 丁国辉, 许伯威. 反铁磁链的自旋 Peierls 相变 [J]. 物理学报, 1999, 48(2): 296 – 301.
- [19] 刘海莲, 王治国, 陈宇光, 等. 具有对称和反对称超交换作用的一维 Spin-Peierls 系统的基态行为 [J]. 物理学报, 2005, 54(5): 2329 – 2333.
- [20] DZYALOSHINSKII I. A thermodynamic theory of “weak” ferromagnetism of antiferromagnetics [J]. J Phys. Chem Solids, 1958, 4(4): 241 – 255.
- [21] MORIYA T. Anisotropic super exchange interaction and weak ferromagnetism [J]. Phys Rev, 1960, 120(1): 91 – 98.
- [22] KRAMERS H A. L’interaction entre les atomes magnétogènes dans un cristal paramagnétique [J]. Physica 1, 1934, 1(1/2/3/4/5/6): 182 – 192.
- [23] AFFLECK I, OSHIKAWA M. On the field-induced gap in Cu benzoate and other $S = 1/2$ antiferromagnetic chains [J]. Phys Rev B, 1999, 60(2): 1038 – 1056.
- [24] JACOBS A E, TETSURO N. Fluctuation-induced phase in CsCuCl_3 in a transverse magnetic field: Theory [J]. J Phys: Cond Matter, 1998, 10(28): 6391 – 6404.
- [25] HOLSTEIN T, PRIMAKOFF H. Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet [J]. Phys Rev, 1940, 58(12): 1098 – 1113.
- [26] Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation field [J]. Phys Rev, 1963, 131(6): 2766 – 2788.
- [27] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程 [M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2012: 127 – 132.
- [28] YOSHIMURA K, WATANABE S. Envelope soliton as an intrinsic localized mode in a one-dimensional nonlinear lattice [J]. J Phys Soc Jpn, 1991, 60(1): 82 – 87.